In the name of Allah, the Most Gracious, the Most Merciful

LA FACULTÉ

SEEK KNOWLEDGE

Copyright disclaimer

"La faculté" is a website that collects copyrights-free medical documents for non-lucratif use.
Some articles are subject to the author's copyrights.
Our team does not own copyrights for some content we publish.
"La faculté" team tries to get a permission to publish any content; however , we are not able to contact all the authors.
If you are the author or copyrights owner of any kind of content on our website, please contact us on: facadm16@gmail.com
All users must know that "La faculté" team cannot be responsible anyway of any violation of the authors' copyrights.
Any lucrative use without permission of the copyrights' owner may expose the user to legal follow-up.

Chapitre 4: Variables aléatoires

0/ Généralités:

1/ Déf 1: on appelle variable aléatoire, une variable susceptible de prendre différentes valeurs auquel il est possible d'affecter une probabilité.

2/ Déf 2: c'est une application:

$$X: \Omega \longrightarrow X(\Omega) \in \mathbb{R}.$$
$$\omega \longrightarrow X(\omega) = x.$$

3/ Déf 3: l'ensemble des valeurs que peut prendre la var. aléatoire X, noté

$$X(\Omega) = \mathcal{X}$$

est appelé « support de la var. aléatoire X ».

si $\mathcal{X}$ discret : soit $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$

avec $x_1 < x_2 < \dots < x_k$

alors : X est une var. aléatoire discrète

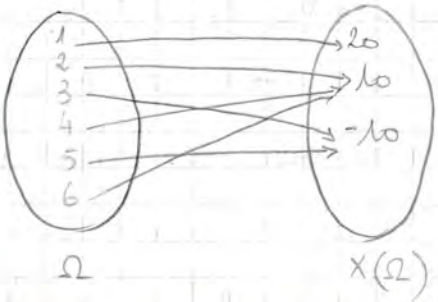
si $\mathcal{X}$ continu : soit $\mathcal{X} \in [a,b] \subset \mathbb{R}$.

alors : X est une var. aléatoire continue.

ex: gain du joueur

On lance un dé. Le joueur gagne 10 DA s'il a un chiffre, 20 DA s'il a l'as et il perd 10 DA s'il a 3 ou 5.

X: gain du joueur.



$$X(\Omega) = \{-10, 10, 20\}$$
$$X: \{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow \{-10, 10, 20\}$$

$X(1) = 10$.

$X(2) = X(4) = X(6) = 10$.

$X(3) = X(5) = -10$.

I/ Variables aléatoires discontinues:

1/ Distribution de proba:

a/ Déf:

Soit X une v. a. d., $\mathcal{X} = \{x_1, \dots x_k\}$ la distribution de proba ou loi de proba ou fonction de masse, est définie par:

i/ son support $\mathcal{X}$

ii/ $P_i = P[X = x_i] \quad \forall x_i \in \mathcal{X}$

Cette distribution de proba est résumé dans un tableau =

x_i	x_1	x_2	...	x_k
P_i	P_1	P_2	...	P_k

« On passe de la Stat. descriptive aux proba en remplaçant les f_i par les p_i. ».

b/ Propriétés :

i/ $0 < p_i < 1$

ii/ $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

c/ Exemples : X : gain loi de X ?

Ex1 : i/ $X = \{-10, 10, 20\}$

ii/ $p_i = ?$ $\forall i$

$p_1 = P(x=-10) = P(\omega=3 \text{ ou } \omega=5)$

$= P(\omega=3) + P(\omega=5)$

$= 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3.$

$p_2 = P(x=10) = P(\omega=2) + P(\omega=4)$

$+ P(\omega=6) = 3/6 = 1/2$

$p_3 = P(x=20) = P(\omega=1) = 1/6.$

x_i	-10	10	20	Σ
p_i	3/6	3/6	1/6	1

Ex2 : 10 { N 6 2 ; B 4 } X : nbre de B obtenues

Loi de X ?

i/ $X = \{0, 1, 2\}$

$\mathcal{E}$: tirer 2 boules d'une urne qui contient 10.

$\rightarrow \Omega = \{\text{comb. de 2 parmi 10}\}$

$|\Omega| = C_{10}^2 = 45.$

$P(X=0) = P(0B \text{ et } 2N) = \frac{C_4^0 C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{15}{45}$

$P(X=1) = P(1B \text{ et } 1N) = \frac{C_4^1 C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{24}{45}$

$P(X=2) = P(2B \text{ et } 0N) = \frac{C_4^2 C_6^0}{C_{10}^2} = \frac{6}{45}$

$P(X=k) = P(kB \text{ et } (2-k)N) = \frac{C_4^k C_6^{2-k}}{C_{10}^2} \quad \forall k = 0, 1, 2 \ldots$

2/ Fonction de répartition (f.r.)

a/ Déf :

Soit X une var. aléatoire. La f.r. de X $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$

$x \rightarrow F_X(x) = P(X \leq x).$

si X est une v. a. d. $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots x_k\}$

$\Rightarrow F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i).$

La f.r, dans le cas discret, est une fonction en escalier. Elle est définie de la sorte :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ p_1 & x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \end{cases}$$

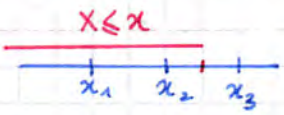
i/ $x < x_1$ $F_X(x) = P(X \leq x) = P(\phi) = 0$

ii/ $x_1 \leq x < x_2$ $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = x_1)$

$= p_1.$

iii/ $x_2 \leq x < x_3$ $F_X(x) = P(X = x_1 \text{ ou } X = x_2)$

$= p_1 + p_2$



N.B : Ceci nous rappelle la notion de fréquences cumulées en Stat. descriptive

De façon générale, on a :

$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$

$= F(b) - F(a).$

$P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a)$

$= [P(X \leq b) - P(X = b)] - P(X \leq a)$

$= F(b) - F(a) - P(X = b)$

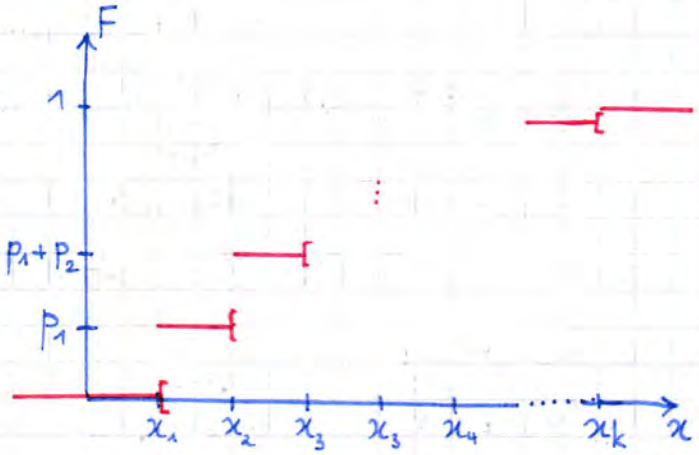
$P(a \leq x \leq b) = P(x \leq b) - P(x < a)$

$= F(b) - F(a) + P(x = a).$

$P(a \leq x < b) = P(x < b) - P(x < a)$

$= F(b) - F(a) - P(x = b) + P(x = a)$

b/ Graphe:



Toute f.r. possède les 4 propriétés suivantes

* i/ $0 \leq F(x) \leq 1$

ii/ $F(x) \nearrow$

iii/ F continue à droite.

iv/ $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

** Réciproquement, toute fonction réele vérifiant ces 4 propriétés peut-être considérée comme une f.r. d'une var. aléatoire.

ex: X: gain du joueur $F_X(x) = ?$

x_i	-10	10	20
P_i	2/6	3/6	1/6

$$F(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x < -10. \\ 2/6 & \text{si } -10 \leq x < 10 \\ 5/6 & \text{si } 10 \leq x < 20 \\ \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1 & x \geq 20 \end{cases}$$

II/ Variables aléatoires continues:

1/ loi de probabilité:

a/ Introduction:

si X est une v. a. ct, alors:

$P(X = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

ex: X est une v.a. de support $[0,4]$.

si $x < 0$: $P(X = x) = 0 = P(\Phi)$.

si $x > 4$: $P(X = x) = P(\Phi) = 0$.

$x = \pi$: $P(X = \pi) = P(x = 3,1415...)$

$= 0.$

$x = 1$: $P(X = 1) = P(x = 1,000....).$

$= P(\Phi) = 0.$

Comme $P(X = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Alors, on définira la loi de proba d'une v. a. ct. par sa fonction de répartition: $F(x) = P(X \leq x)$ ou bien, sa densité de proba: $f(x)$.

b/ Déf: une v.a X est dite absolument continue si, et seulement si, il existe une fonction f définie:

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

$x \longrightarrow f(x)$

tel que: $F(x) = P(X \leq x)$

$= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

(f(.) est appelée densité de proba de X).

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x).$$

*

	V.a.d.	V.a.c.
$\mathcal{X}$	$\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$	$[a,b]$.
Loi	$P_i = P(X = x_i)$	$f(x)$ densité
fct.	$\sum_{x_i \leq x} P[X = x_i]$	$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$
	$0 < P_i \leq 1$	$f(x) > 0$
	$\sum_{\mathcal{X}} P_i = 1$	$\int_{\mathcal{X}} f(x)\,dx = 1$

c/ Propriétés:

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$.

$f(x)$ est une densité, si et seulement si,

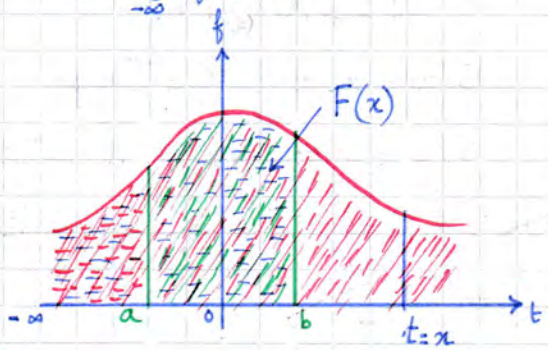
i/ $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}$ et 0 sinon.

et

ii/ $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1 \iff \int_{\mathcal{X}} f(x)\,dx = 1$

d/ Graphe:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$



N.B.:

1/ $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$

/// = ≡≡ − ≡

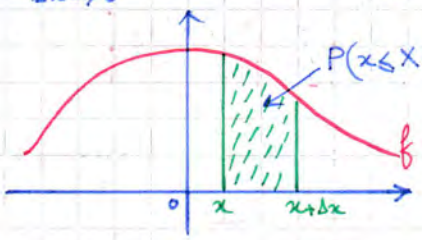
$$P(a < X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx.$$

$$= F(b) - F(a).$$

$$= P(X \leq b) - P(x \leq a).$$

2/ $P(X = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$$P(X = x) = \lim_{\Delta x \to 0} P(x \leq X < x + \Delta x).$$



Conséquences:

$$P(X \geq x) = P(X > x) + \cancel{P(X = x)}^{\,0}.$$

$$P(X \leq x) = P(X < x) + \cancel{P(X = x)}^{\,0}$$

3/ Si X est une v.a.c. $\Rightarrow F(x)$ est continue

III/ Espérance et Variance:

1/ Espérance:

a/ Déf:

X est une v.a. de support $\mathcal{X}$, l'espérance de X : $E(X)$, est définie par

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{x_i \in \mathcal{X}} x_i P(X = x_i) & \text{si v.a.d.} \\ \int_{\mathcal{X}} x f(x)\,dx & \text{si v.a.c} \end{cases}$$

b/ Proposition:

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to h(x) = y$.

Soit X une v.a. de support $\mathcal{X}$.

Soit $Y = h(X)$.

$$E(Y) = \begin{cases} \sum_{x_i \in \mathcal{X}} h(x_i) P(X = x_i) & \text{si X v.a.d.} \\ \int_{\mathcal{X}} h(x) f(x)\,dx & \text{si X v.a.c.} \end{cases}$$

ex: X: gain du joueur.

x_i	-10	10	20	Σ
P_i	2/6	3/6	1/6	1
$x_i P_i$	-20/6	30/6	20/6	30/6 = 5 = E(X)
$2x_i P_i$	-40/6	60/6	40/6	E(Y) = 10

Soit : $Y = 2X = h(X)$ $\quad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to h(x) = y = 2x$

$$E(Y) = \Sigma 2x_i P(X = x_i).$$

N.B.: E(X) est la moyenne théorique.

ex: gain du joueur.

On a : $E(X) = 5$.

Si le joueur joue un grand nombre de fois, il espère gagner en moyenne 5 DA.

2/ Variance.

a/ Déf:

La Variance de X, notée Var (X) ou V(X) est définie par:

$$E\left[(X - E(X))^2\right].$$

$$Var(X) = \begin{cases} \sum_{x_i \in \mathcal{X}} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) & \text{si X v.a.d.} \\ \int_{\mathcal{X}} (x - E(X))^2 f(x)\,dx & \text{si X v.a.c.} \end{cases}$$

b/ Calcul : Formule de Koening:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X).$$

$$\text{ou } E(x^2) = \begin{cases} \Sigma x_i^2 p(X = x_i) & \text{si X v.a.d.} \\ \int x^2 f(x)\,dx & \text{si X v.a.c.} \end{cases}$$

3/ Propriétés:

Soit X et Y deux v.a. et a et b deux constantes.

Espérance	Variance.
$E(a) = a$.	$V(a) = 0$
$E(aX) = aE(X)$	$V(aX) = a^2 V(X)$.
$E(aX+b) = aE(X) + b$	$V(aX+b) = a^2 V(X)$.
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$	$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ (si indépendance)
$E(h(x)) > 0$ si $h(x) > 0$	$V(h(X)) > 0$

N.B.: X : variable aléatoire v.a.

x : observation = constante.

$$X : \Omega \to \mathcal{X}, \quad \omega \to X(\omega) = x.$$

$E(x) = x \neq E(X) = \Sigma x_i p_i$.

$V(x) = 0 \neq V(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

III/ Variables aléatoires indépendantes:

1/ Loi conjointe:

a/ Cas discret:

Soit X une v.a. $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_k\}$

Y une v.a. $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_k\}$

$P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = P_{ij} \quad \forall x_i \in \mathcal{X}$ et $y_j \in \mathcal{Y}$

→ Distribution conjointe de X et Y

b/ Cas continu:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

2/ Indépendance :

X et Y indépendants $\Leftrightarrow P(X=x_i \text{ et } Y=y_j)$

$= P(X=x_i) \times P(Y=y_j)$

$\forall x_i \in \mathcal{X}$ et $y_j \in \mathcal{Y}$

si X et Y v. a. d.

$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \times F_Y(y)$

$= P(X \leq x \text{ et } Y \leq y)$

$= P(X \leq x) \times P(Y \leq y)$

$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$.